분수 계산에서 절차적 지식의 획득을 위한 학습 방법들의 적용 효과 분석

김 성 만 (인천신촌국민학교)
전 평 국 (한국교원대학교)

초등 수학의 수업의 주요 목표 중 가장 많이 언급되고 있는 것 중의 하나는 바로 기능(skills)의 발달이다. 기능이란 우리가 무엇인가를 할 수 있지 않으면 안되는 능력으로서 이러한 기능은 개념, 원리들로부터 나오고 다른 개념과 원리의 이해에 토대가 되기도 한다. 초등 수학이 앞으로의 학습과 일상 생활에서의 수학적 지식의 활용도를 높이는 것을 목표로 한다면 수학적 기능의 학습은 수학의 대상에서 중요한 한 부분이 된다고 하겠다.

인지 기능의 한 유형으로서 수학적 기능 획득에 대해 논의하고자 한다면 최근의 학습 과정에 대한 문헌들에서 말하고 있는 지식의 유형들에 대한 고찰을 필요로 한다.

지식의 유형은 대체로 이분하여 언급되고 있는데, Hiebert와 Lefevre(1986)는 개념적 지식(conceptual knowledge)과 절차적 지식(procedural knowledge)의 두 범주로 나누고 있다.

Hiebert와 Lefevre(1986)는 개념적 지식을 관계가 풍부한 지식으로서 가장 분명한 특성을 가지고 있다고 정의하였고, 개념적 지식은 관계들이 잘 연결되어 있는 지식의 망(network)으로서 생각하였다. 마찬가지로 Anderson(1976)은 그의 ACT이론에서 '사실을 아는 것(knowing that)'을 선언적 지식(declarative knowledge)이라 하면서 이러한 지식이 명제들의 망으로서 관계를 맺고 있는 지식이라고 밝히고 있다. Hiebert와 Lefevre, Anderson이 말하는 이러한 개념적 혹은 선언적 지식의 정의를 살펴볼 때 어떤 정보가 개념적 지식이 되는 것은 지식 소유자가 자신이 가지고 있는 정보들과 그 정보의 관계를 인식할 때이다.

개념적 지식의 정의와는 달리 절차적 지식은 '방법을 아는 것(knowing how)'으로서 기능과 관계가 깊다. Hiebert와 Lefevre은 절차적 지식을 형식(form), 즉, 수학의 형식적 언어 또는 부호 표현 체계에 대한 지식과 알고리즘과 법칙 등에 대한 지식의 두 부분으로 이루어져 있다고 생각한다. 이러한 절차적 지식은 절차 실행의 조건이 맞으면 행위가 일어난다는 점에서 Anderson(1976)은 조건-행위(condition-action)의 쌍으로 이루어져 있는 산출 체계(production systems) 형식을 사용하여 이러한 유형의 지식을 표현한다.

이러한 개념적 지식과 절차적 지식으로 표현되는 두 가지 유형의 지식이 학생들 머릿속에서 잘 연결되어 있지 않을 때 많은 문제가 생길 수 있다. 예를 들어, 분수의 학습에 있어서, 학생들은 학교에서 배운 개념과 형식적 절차를 학교 밖에서의 생활을 통해 얻은 분수에 관한 경험과 분수 사용의 비형식적 절차에 연관시키지 못하는 경향이 있는데, 이것은 지식을 획득할 당시와 다른 상황에서는 지식의 전이(transfer)와 지식의 생성력(generativity)이 부족한 단편적인 지식 토대(knowledge base)를 만들어 내게 한다(LeFevre, 1986). 이로 인하여, 학생들은 부호로 표현된 분수를 조작할 때 수많은 공통된 오류를 범하게 되며 이것은 분수에 대한 이해, 즉, 기초 개념보다는 분수 연산에 대한 부정확한 기계적 절차의 지식을 가지고 있기 때문에 기인하는 것으로 연구 결과들은 보고하고 있다(Carpenter, Cobit, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981).

ㆍ러한 문제의 원인을 정확히 이해하기 위해서는 어떤 과제 수행에서, 특히 수학과 같은 인지 기능(cognitive skills)을 요구하는 분야에서 절차적 지식, 즉, 기능이 어떻게 발달하는지를 살펴 볼 필요가 있다.

Anderson(1982)은 ACT 체계에 구현된 기능획득의 세 단계를 소개하고 있다. 그 처음이 선언적 단계(declarative stage)로서 이 단계에서 학습자는 기능에 대한 교수와 정보를 받음으로써, 그 정보와 관련된 장기 기억 속의 정보를 인출하고, 기능을 수행하기 위한 일련의 요소(facts)들을 작동 기억(working memory)에 보존함으로서 그 기능을 수행하기 위한 해석적 절차(interpretive procedures)를 사용할 수 있게 된다. 이 때 학습자가 그 기능의 수행을 위해서, 요구된 정보들을 되풀이 연습하는 언어적 조정(verbal mediation)이 자주 관찰된다. 두 번째 단계인 지식 편집 (knowledge compilation) 단계에서는 연습을 통하여, 선언적 지식이 다른 해석절차를 거치지 않고 그것이 직접적으로 적용될 수 있으며, 선언적 지식이 절차적 형태로 점진적으로 개조되는 단계이다. 세 번째로 절차적 단계(procedural stage)에서 선언적 지식은 보다 더 적절하게 적용될 수 있도록 더욱 더 조율(tuning)되며, 점진적으로 기능을 수행하는 과정의 속도가 빨라진다.

Anderson의 이런 인지 기능 발달의 단계를 살펴보면, 절차적 지식 학습에서 최초로 제공되는 정보가 학습자가 가지고 있는 관련 지식을 인출토록 하지 못한다면 다음의 단계로의 전환은 느릴 것이고 기계적인 암기에 의한 학습이 일어날 수밖에 없음을 알 수 있다. 따라서 한 기능을 효과적으로 학습하기 위해서는 학습자가 장기기억 속에 학습 내용과 관련된 지식이 있어야 하며 이 지식을 활성화시킬 수 있는 적절한 정보가 주어져야 한다. 그러나, 학습자가 들어오는 정보를 적절히 표상하지 못한다면, 관련된 선행 지식이 있다하더라도 적절한 활성화가 일어나지 않을 것이다(Gagné, 1985). 왜냐하면 이러한 정보의 표상이 일어난 후에, 학습자는 이러한 표상을 사용하여 장기 기억을 탐색하게 되고 이런 의식적인 장기 기억의 탐색은 그가 작동 기억 내에서 채택한 표상에 의해 제한된 특별한 인

출 단서(retrievial cues)에 의해 좌우되기 때문에 잘못된 표상은 잘못된 지식을 활성화시켜 적절한 학습을 방해하기 때문이다. 따라서, 절차적 지식 학습의 초기 단계에서 학습자들이 올바른 표상을 할 수 있는 단서를 제시하는 것은 매우 중요한 일이다(Jeon, 1988).

따라서, 본 연구는 절차적 지식의 학습에 있어 아동들의 선행 지식을 효과적으로 활성화시킬 수 있는 적절한 단서의 제공 및 그에 따른 절차적 지식의 획득과 파지(retention)에 유용한 획득 방법을 조사해 보는 데에 그 목적을 두고, 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1. 절차적 지식 학습의 초기 단계에서, 절차적 지식을 획득시키는 방법(기하적 방법, 대수적 방법, 발견적 방법)간에는 차이가 있는가?

1-1. 절차적 지식을 발견적 방법으로 획득한 아동들이 택한 방법은 주로 어떤 방법인가?

2. 절차적 지식을 획득시키는 방법(기하적 방법, 대수적 방법, 발견적 방법)에 따라 학습한 집단 간에는 절차적 지식의 획득에 차이를 보이겠는가?

3. 절차적 지식의 파지(retention)에서 세 집단(기하적 방법 집단, 대수적 방법 집단, 발견적 방법 집단)간에는 차이가 있겠는가?

연구 방법 및 절차

연구 대상

본 연구는 경기도 광명 시에 소재하고 있는 H 국민학교 4학년 6개 반 전체 학생 248명 중 선행 지식 검사를 통해 선정된 102명을 분석 대상으로 하여 실시되었다. 실험 집단 편성은 이렇게 선정된 아동들이 속해 있는 학급과 실험 처치 방법을 임의 대응하여 기하적 처치 집단(37명), 대수적 방법 처치 집단(30명), 발견적 방법 처치 집단(35명)으로 하였다.

H 국민학교는 서울 근교의 아파트 단지 내에 위치하고 있는 학교로서 4학년 학생들의 산수과 학업 성취도는 중상 정도이고 가정환경은 중류 수준이 대부분이다.

검사 도구

본 연구에서는 3가지 검사 도구가 사용되었다: (1) 선행 지식 검사, (2) 절차적 지식 획득 검사, (3) 절차적 지식 파지 검사.

(1) 선행 지식 검사에서는 연구에 필요한 선행 지식을 갖춘 아동들을 선정하기 위한 목적으로 실시하였다. 선행 연구자들(Byrnes & Wasik, 1991; LeFevre, 1987; Hiebert & LeFevre, 1986)이 사용한 문항 선정 준거를 사용하여 개념적 지식을 묻는 문항 9 문

항, 하위 기능을 묻는 문항 3 문항 등 총 12 문항으로 하였다.

선행 지식을 완전히 갖춘 아동을 선정하기 위해 이 검사에서 만점을 획득한 아동들만을 연구 대상으로 선발하였다.

(2) **절차적 지식 획득 검사**는 실험 처치를 받은 아동들이 본 연구에서 제시한 절차에 따라 분수 계산에서의 절차적 지식을 획득했는지 알아보기 위한 목적으로 실시하였다. 절차적 지식 획득의 두 가지 기준, 즉, 속도와 정확성 중에 본 연구에서는 계산의 정확성이 계산 실행의 속도보다 우선한다고 보고, 절차 실행의 속도는 절차적 지식 획득 준거로 하지 않았다. 절차적 지식 획득 검사지의 문항은 학습지에 제시된 문항과 같은 유형이나 각 집단 별로 제시되었던 단서는 제시하지 않았고 문제만을 제시하였으며 사용된 숫자도 달리하였다. 문항 수는 6개로 절차적 지식 학습지에 사용된 학습 내용별로 한 문항 씩 선정 제시하였다(<부록 4 참조>).

(3) **절차적 지식 파지 검사**는 분수 계산 절차의 학습에 대한 실험 처치 9일 후 아동들이 학습한 절차적 지식을 파지하고 있는지를 측정하기 위해서 본 연구자에 의해 구안되었다.

학습 내용별 문제 유형과 문제 수, 문제의 배치는 절차적 지식 획득 검사와 동일하나, 다만 문제에 쓰인 숫자만 다른 동형 검사이다.

처치 도구

본 연구에서는 효율적으로 연구 문제를 달성하기 위해서 교사의 개입을 제거한 세 가지 학습지 - 절차적 지식 학습지 1), 2), 3) - 를 통해 아동들이 스스로 학습하도록 하였다(<부록 1>,<부록 2>,<부록 3> 참조).

절차적 지식 학습지 1)은 각각의 실험 집단(기하적 처치 집단, 대수적 처치 집단, 발견적 처치 집단)이 학습지에 제시한 단서의 유형(기하적 처치 집단은 제시한 분수 계산의 해결을 돕기 위한 그림이 제시되고, 대수적 처치 집단은 아동이 자신의 선행 지식을 사용할 수 있도록 문장 혹은 수식을 제시하고, 발견적 집단은 아무런 단서가 제시되지 않았다)에 따라 초기 단계에서의 분수 계산에 대한 절차적 지식의 획득의 차이를 알아보기 위해 사용되었다.

이 학습지 1)의 학습 내용은 4학년 아동들이 새로이 학습해야할 분수 계산에 관한 6개의 내용 — 이분모 분수의 덧셈, 이분모 분수의 뺄셈, 자연수 × 분수, 분수 × 자연수, 분수 ÷ 자연수, 자연수 ÷ 분수 — 으로 구성되어 있으며, 세 실험 집단의 각각에 제시된 학습 내용은 제시한 학습 내용만 다를 뿐 그 배열과 유형, 해결해야 할 문제에 제시된 분수는 모두 동일하다.

아동들이 새로운 절차적 지식을 접하여 학습의 초기 단계에서는 어떻게 반응하는 지

를 알아보기 위해서 해답을 제시하지 않았다. 즉, 피드백을 제공하지 않았다.

절차적 지식 학습지 2), 3)은 학습지 1)과 동일한 내용으로, 문제로 제시된 분수만을 달리하여 각 집단별 처치 방법대로 구성되어있다. 절차적 지식 학습지 2), 3)이 학습지 1)과 다른 점은 학습 내용 제시 후 마지막 장에 문제에 대한 해답이 제시된다는 점이다. 이것은 아동들이 학습한 내용에 대하여 스스로 피드백을 받을 수 있도록 하기 위해서이다.

세 집단의 아동들이 각각 학습지 1), 2), 3)을 통해 분수 계산에 대한 절차적 지식을 학습하는 동안에 교사의 역할은 단지 아동들이 주어진 학습지에 전념할 수 있도록 하는 것이고, 아동들이 학습지의 해답을 보고 다시 학습 내용을 생각할 수 있도록 안내해주는 것으로 제한하였다.

연구 절차

1) 검사 실시

검사 실시는 각각의 아동이 속해있는 자기 학급에서 담임 교사의 감독하에 편안한 분위기에서 아래와 같은 일정에 따라 실시되었다.

① 선행 지식 검사: 1994년 11월 5일 4교시 40분간 실시

② 절차적 지식 획득 검사: 1994년 11월 10일 방과후 40분간 실시

③ 절차적 지식 파지 검사: 1994년 11월 19일 4교시 40분간 실시

2) 실험 처치 방법

학습지에 의한 실험 절차는 다음과 같이 진행되었다.

- 절차적 지식 학습지 1): 1994년 11월 7일 방과후 40분간 실시하였고 다른 아동과 의논함이 없이 담임 교사의 지도하에 개인별로 학습하도록 하였고, 발견적 처치 집단의 아동들에게는 주어진 문제에 그들이 접근하는 방법을 알아보기 위해서 자신이 생각한 방법을 적게 하였다.
- 절차적 지식 학습지 2): 1994년 11월 8일 방과후 40분간 절차적 지식 학습지 1)을 학습한 방법과 같이 학습하도록 하였다.
- 절차적 지식 학습지 3): 1994년 11월 9일 방과후 40분간 절차적 지식 학습지 2)와 동일한 학습 방법으로 진행되었다.

자료의 수집 및 분석

절차적 지식 학습지 1)의 각 내용에 대한 채점은 올바른 반응을 보인 내용에 대해서는 1점, 틀린 반응에는 0점으로 처리하여 연구문제 1을 해결하기 위한 자료로 삼았다. 연구 문제 1에 대한 분석 방법은 세 실험 처치 집단의 절차적 지식 학습지 1)의 결과에

서 아동들의 점수로 일원 분산 분석(One-Way ANOVA)을 실시하였다.

발견적 처치 집단의 절차적 지식 1)에서 보인 학습 내용별 접근 방법을 기하적 접근 방법, 대수적 접근 방법, 무반응으로 분류하여 해당되는 아동수의 백분율(%)을 구해 연구 문제 1-1을 해결하기 위한 자료로 삼았다.

절차적 지식 획득 검사지의 채점 방법은 절차적 지식 학습지 1)과 동일하게 하였다. 연구 문제 2를 해결하기 위해서 이 절차적 지식 획득 검사에서 각 집단의 아동들이 획득한 점수로 일원 분산 분석을 실시하였다.

절차적 지식 파지 검사의 채점 방법은 절차적 지식 획득 검사지의 채점과 동일하게 하였다. 연구 문제 3을 해결하기 위해서 이 절차적 지식 파지 검사에서 각 집단의 아동들이 획득한 점수로 일원 분산 분석을 실시하였다.

답안 작성은 검사지에 직접 하도록 하였으며 검사지 수집은 담임 교사가, 채점은 본 연구자가 수행하였다.

결과 분석

1. 연구 문제 1 - 절차적 지식 학습의 초기 단계에서, 절차적 지식을 획득시키는 방법(기하적 방법, 대수적 방법, 발견적 방법)간에는 차이가 있는가?

<표 1>은 분수 계산의 절차적 지식 학습지 1)에서 각 집단의 아동들이 획득한 점수를 각 학습 내용별로 정리해 놓은 것이다. 이 표에서 볼 수 있는 바와 같이,기하적 단서를 제시받는 집단이 다른 집단에 비해 전체 학습 내용에 대해 55.86%로 각각 31.67%, 30.48%의 결과를 보인 다른 두 집단에 비해 높은 점수를 획득한 것으로 나타나 있다.

※ 앞으로 학습 내용은 덧셈, 뺄셈, 곱셈(1), 곱셈(2), 나눗셈(1), 나눗셈(2)로 표기한다.

각 집단간에 통계적으로 유의한 차를 보이는지를 알아보기 위해 각 문항 별로 집단간의 학습 결과의 평균 점수로 그 차이를 분석하고 전체 문항에서의 평균 획득 점수의 차를 분석하였다. 먼저 각 문항에서 획득한 점수를 종속 변수로 하고 집단을 인자(factor)로 하는 일원 분산 분석을 실시하였으며, 검정 결과는 <표 2>에 나타나있다.

<표 1> 분수 계산의 절차적 지식 학습지 1)의 학습 내용별 결과 요약.

집 단(n) / 학습 내용	기하적 방법 (37)		대수적 방법 (30)		발견적 방법 (35)	
	맞은 아동	%	맞은 아동	%	맞은 아동	%
덧셈 [(진분수)+(진분수)]	34	91.89	13	43.33	15	42.86
뺄셈 [(진분수)-(진분수)]	32	86.49	17	56.67	15	42.86
곱셈(1) [(자연수)×(진분수)]	17	45.95	2	6.67	13	37.14
곱셈(2) [(진분수)×(자연수)]	27	72.97	8	26.67	9	25.75
나눗셈(1) [(진분수)÷(자연수)]	9	24.32	10	33.33	6	17.14
나눗셈(2) [(자연수)÷(진분수)]	5	13.51	7	23.33	6	17.14
평균	3.3514	55.86	1.9000	31.67	1.8286	30.48

<표 2> 분수 계산의 절차적 지식 학습지 1)의 전체 학습 내용의
학습 결과에 대한 일원 분산 분석(One-Way ANOVA)표.

학습 내용	변량원	df	SS	MS	F비	유의 확률
덧셈	집단간	2	5.6189	2.8094	14.8776	0.0000***
	집단내	99	18.6949	.1888		
뺄셈	집단간	2	3.5807	1.7904	8.7475	0.0003***
	집단내	99	20.2624	0.2047		
곱셈(1)	집단간	2	2.7335	1.3667	7.0373	0.0014**
	집단내	99	19.2273	0.1942		
곱셈(2)	집단간	2	5.1699	2.5850	12.8925	0.0000***
	집단내	99	19.8497	0.2005		
나눗셈(1)	집단간	2	0.4236	0.2118	1.1367	0.3250
	집단내	99	18.4489	0.1864		
나눗셈(2)	집단간	2	0.1611	0.0806	0.5439	0.5822
	집단내	99	14.6624	0.1481		

** $p < 0.005$, *** $p <$ o.ool.

<표 2>를 살펴보면, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, (분수) × (자연수) 학습에 있어 세 집단간에 각기 유의 수준 0.001에서, (자연수) ×(분수)에 대해서는 유의 수준 0.005에서 통계적으로 유의한 차이를 나타내고 있으며, (분수) ÷ (자연수), (자연수) ÷ (분수) 학습에 있어서는 일반적인 유의 수준 0.05에서 유의한 차가 없음을 알 수 있다. 유의한

차이를 나타낸 학습 내용별로 어떤 집단이 유의한 차를 만드는 지 분석하기 위해서 본 연구에서는 Scheffé-검정을 통하여 알아보고, <표 3>에 그 결과를 요약하였다.

<표 3>을 살펴보면, 절차적 지식 학습지 1)의 학습 내용 중, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, (분수) × (자연수) 학습에 있어 유의 수준 0.05에서 집단 G와 집단 A, 집단 G와 집단 D가 유의한 차이를 보이고 있으며 집단 A와 집단 D는 동일한 집단으로 간주되고 있다. 즉, 대수적 방법으로 단서를 받은 집단과 아무런 단서를 받지 않은 집단은 차이를 보이지 않는 반면, 기하적 집단은 다른 두 집단과 통계적으로 유의한 차이를 보이고 있다. 따라서 분수 계산의 절차적 지식에 대한 최초 학습 결과에서, 이 세 학습 내용에 대해 유의하게 높은 결과를 낳은 집단이 기하적인 학습 처치를 받은 집단임을 알 수 있다.

또한, (자연수) × (분수)에 대해서는 유의 수준 0.05에서 집단 G와 A, D와 A가 유의하게 다르고 집단 D와 G는 차이가 없게 나타났다. 따라서 대수적 단서를 제시받은 집단이 기하적 방법 집단과 발견적 방법 집단과 최초 학습에서 유의하게 낮은 결과를 나타냈고, 기하적 방법 집단과 대수적 방법 집단 간에는 유의한 차이가 없었다.

<표 3> 분수 계산의 절차적 지식 학습지 1)의 학습 결과에서 유의한 차이를 나타낸 학습 내용별 Scheffé-검정의 결과(세 집단의 조화 평균; 33.7337).

학습 내용	q-통계량 / 집단 (평균)	발견적 방법 집단 (D)	대수적 방법 집단 (A)	기하적 방법 집단 (G)
덧셈	D(0.4286)			
	A(0.4333)	0.06		
	G(0.9189)	6.55*	6.49*	
뺄셈	D(0.4286)			
	A(0.5667)	1.77		
	G(0.8649)	5.60*	3.83*	
곱셈(1)	D(0.3714)			
	A(0.0667)	4.01*		
	G(0.4595)	1.16	5.18*	
곱셈(2)	D(0.2571)			
	A(0.2667)	0.12		
	G(0.4595)	6.13*	6.01*	

* p < o.o5 ($q_{.05}$ = 3.51).

분수 계산 절차적 지식 학습지 1)의 전체 학습 내용에 대한 결과를 토대로 세 집단간의 차이를 일원 분산 분석을 실시해 본 결과 <표 4>에 나타나 있는 바와 같이, 세 집단 간의 최초 학습 효과에는 유의 수준 0.001에서 유의한 차이가 있음을 알 수 있다.

<표 4> 절차적 지식 학습지 1)의 학습 결과의 일원 분산 분석표

변량원	df	SS	MS	F비	유의 확률
집단간	2	52.4157	26.2079	11.3746	0.0000***
집단내	99	228.1039	2.3041		
합계	101	280.5196			

*** $p < 0.001$

분수 계산에서의 절차적 지식의 전체 학습 내용에 대한 최초 학습에 있어 어떠한 집단이 더 유의하게 높은 결과를 나타냈는지는 절차적 지식 학습지 1)의 결과에 대해 Scheffé-검정을 실시해서 알아보았으며 그 결과는 <표 5>와 같았다.

<표 5>에 따르면, 대수적으로 학습 단서를 제시받은 집단과 아무런 단서를 제시받지 못한 발견적 학습 방법 집단간의 최초 학습 결과는 유의 수준 0.05에서 차이가 없었고, 기하적 방법으로 최초의 학습에 임한 집단이 다른 두 집단보다 유의한 차이가 있음이 나타나 있다. 따라서, 전체 학습 내용에 대한 최초 학습 결과는 기하적 방법이 다른 두 집단보다 더 유의하게 높음을 알 수 있다.

<표 5> 분수 계산의 절차적 지식 학습지 1)의 전체 학습 내용에 대한 학습 결과의 Scheffé 검정 결과(세 실험 집단의 조화 평균; 33.7337).

q-통계량 / 집단(평균)	발견적 방법 집단 (D)	대수적 방법 집단 (A)	기하적 방법 집단 (G)
D (1.8286)			
A (1.9000)	0.27		
G (3.3514)	5.83*	5.55*	

* $p < 0.05$ ($q_{.05} = 3.51$)

이상을 종합해 볼 때, 세 집단간의 새로운 절차적 지식 학습의 초기 단계에서 전반적으로 더 높은 효과를 나타낸 집단은 바로 기하적인 단서를 제시받은 기하적 방법 집단이었고 특히, 이분모 분수 덧셈과 뺄셈, 자연수와 분수의 곱셈에서 다른 두 집단 보다 높은 초기 학습 결과를 나타냈음을 알 수 있다.

2. 연구문제 1-1 - 절차적 지식을 발견적 방법으로 획득한 아동들이 택한 방법은 주로 어떤 방법인가?

<표 6> 절차적 지식 학습지 1)에 대해 발견적 방법 집단이 사용한 접근 방법 분석표

문항 \ 접근 방법	기하적 방법		대수적 방법		무반응
	총인원	맞은 아동	총인원	맞은 아동	
덧셈	3	2	32	13	0
뺄셈	5	1	29	14	1
곱셈(1)	0	0	35	13	0
곱셈(2)	1	1	34	8	0
나눗셈(1)	2	0	32	6	1
나눗셈(2)	2	0	31	6	2
합계	13	4	193	60	4
%	6.19	1.90	91.90	28.57	1.90

발견적 집단 아동들의 절차적 지식 학습지 1)에 대한 반응 형태를 기하적 접근 방법, 대수적 접근 방법으로 분류해 본 결과, <표 6>에 나타난 바와 같이 전 학습 내용에 대해 기하적 방법으로 접근한 아동의 수는 13명으로 전체의 6.19%, 대수적 접근법을 취한 아동의 수는 193명으로 전체의 91.9%, 반응을 보이지 않은 아동은 전체 4명으로 전체의 1.9%로 나타났다. 이중 정확한 반응을 보인 아동은 기하적 접근 방법을 취한 아동들에서 4명(전체의 1.9%), 대수적 접근 방법을 취한 아동들에서 60명(전체의 28.57%)으로 대수적 접근법을 취한 아동들이 압도적으로 많았음을 알 수 있었다.

2. 연구 문제2 - 절차적 지식을 획득시키는 방법(기하적 방법, 대수적 방법, 발견적 방법)에 따라 학습한 집단 간에는 절차적 지식 획득에 차이를 보이겠는가?

<표 7>은 사후 검사의 결과를 학습 내용별로 요약하고 각각에 대한 백분율을 보여주고 있다.

<표 7> 분수 계산의 절차적 지식 획득 검사 결과표

학습 내용 \ 집단(n)	기하적 방법 (37)		대수적 방법 (30)		발견적 방법 (35)	
	맞은 아동	%	맞은 아동	%	맞은 아동	%
덧 셈	14	37.84	27	90.00	19	54.29
뺄 셈	16	43.24	24	80.00	16	40.68
곱 셈(1)	18	48.65	18	60.00	14	40.00
곱 셈(2)	21	56.76	19	63.33	14	40.00
나눗셈(1)	3	8.11	8	26.67	8	22.86
나눗셈(2)	6	16.22	20	66.67	8	22.86
평 균	2.1081	35.14	3.8333	63.89	2.2571	37.62

우선 전체적인 결과를 보면, 기하적 방법에 의한 학습에 임한 아동 37명 중 35.14%,

대수적 방법에 의한 학습에 임한 아동 30명 중 63.89%, 발견적 방법에 의한 학습에 임한 아동 35명 중 37.62%로 대수적 방법에 의한 학습을 받은 아동의 비율이 높았음을 알 수 있다. 특히 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 학습 결과가 90%, 80%의 획득율을 보임으로서 다른 두 집단과 확연히 구분됨을 알 수 있다.

<표 8> 절차적 지식 획득 검사 결과에 대한 학습 내용별 일원 분산 분석표

학습 내용	변량원	df	SS	MS	F비	유의 확률
덧셈	집단간	2	4.6175	2.3087	11.3799	0.0000***
	집단내	99	20.0884	0.2029		
뺄셈	집단간	2	2.6881	1.3441	5.8963	0.0038**
	집단내	99	22.5668	0.2279		
곱셈(1)	집단간	2	0.6470	0.3235	1.2890	0.2801
	집단내	99	24.8432	0.2509		
곱셈(2)	집단간	2	0.9640	0.4820	1.9519	0.1474
	집단내	99	24.4477	0.2469		
나눗셈(1)	집단간	2	0.6659	0.3330	2.2280	0.1131
	집단내	99	14.7949	0.1494		
나눗셈(2)	집단간	2	4.8015	2.4008	13.3039	0.0000***
	집단내	99	17.8651	0.1805		

** $p < 0.005$, *** $P < 0.001$

절차적 지식 획득 검사지에서 각 학습 내용별로 각 집단이 획득한 점수에 통계적 차이가 있는 가를 알아보기 위해서 실시한 일원 분산 분석의 결과가 <표 8>에 요약되어 있다.

<표 8>에서, 각 학습 내용별로 살펴보면, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, (자연수) ÷ (분수)에서 각기 유의 수준 0.001, 0.005, 0.001에서 유의한 차가 있음을 알 수 있다. (자연수) × (분수), (분수) × (자연수), (분수) ÷ (자연수)에 대한 평균의 유의차 검증에서는 세 집단이 0.05 유의 수준에서 유의한 차가 없었다.

<표 8>에서 세 집단간에 유의한 차이가 있는 것으로 나타난 세 학습 내용에 대한 사후 검정(Scheffé-검정)을 실시해 본 결과는 <표 9>에 요약되어 있다.

<표 9>에서 대수적 방법으로 학습한 집단이 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, (자연수) ÷ (분수)에서 기하적 방법으로 학습한 집단과 발견적 방법으로 학습한 집단과 비교해서 유의 수준 0.05에서 유의한 차가 있고, 기하적 방법 집단과 발견적 방법 집단간에는 차이가 없음을 나타내고 있다. 따라서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 학습, (자연수) ÷ (분수) 학습에 있어 대수적 방법으로 학습한 집단이 기하적 방법으로 학습한 집단과 발견적 방법으로 학습한 집단보다 유의하게 높은 점수를 획득했음을 알 수 있다.

<표 9> 분수 계산의 절차적 지식 획득 검사에서 유의한 차이를 나타낸 학습 내용에 대한 문항별 Scheffé-검정 결과(세 집단의 조화 평균; 33.7337).

학습 내용	q-통계량 / 집단(평균)	기하적 방법 집단 (G)	발견적 방법 집단 (D)	대수적 방법 집단 (A)
덧셈	G (0.3784)			
	D (0.5429)	2.12		
	A (0.9000)	6.71*	4.60*	
뺄셈	G (0.4324)			
	D (0.4571)	0.30		
	A (0.8000)	4.47*	4.17*	
나눗셈 (1)	G (0.1622)			
	D (0.2286)	0.91		
	A (0.6667)	6.90*	5.99*	

* p < o.o5 ($q_{.05}$ = 3.51)

<표 10> 절차적 지식 획득 검사 결과에 대한 일원 분산 분석 결과표

변량원	df	SS	MS	F비	유의 확률
집단간	2	58.2467	29.1234	10.1372	0.0001***
집단내	99	284.4199	2.8729		
계	101	342.6667			

*** p < 0.001

절차적 지식 획득 검사의 전체 문항에 대해 세 집단 간의 평균 학습 결과에 대한 일원 분산 분석을 실시해 본 결과 <표 10>에 나타나 있는 바와 같이 유의 수준 0.001에서 세 집단이 유의한 차를 나타내고 있다.

이에 대한 Scheffé-검정 결과는 <표 11>에 나타나 있는 바, 대수적인 방법으로 학습한 집단이 다른 방법으로 학습한 집단보다 유의 수준 0.05에서 유의하게 높은 학습 결과를 얻었음을 알 수 있다. 따라서 사후 검사에서는 학습지 1)에서의 결과와는 다른 결과를 나타냈다.

<표 11> 절차적 지식 획득 검사의 전체 문항의 결과에 대한 Scheffé 검정 결과(세 실험 집단의 조화 평균; 33.7337).

q-통계량 / 집단(평균)	기하적 방법 집단 (G)	발견적 방법 집단 (D)	대수적 방법 집단 (A)
G (2.1081)			
D (2.2571)	0.51		
A (3.8333)	5.91*	5.40*	

* p < o.o5 ($q_{.05}$ = 3.51)

3. 연구 문제 3 - 절차적 지식의 파지도(retention)에 세 집단(기하적 방법 집단, 대수적 방법 집단, 발견적 방법 집단)간에 차이가 있겠는가?

이 연구 문제를 해결하기 위해서 실험 처치 9일 후 실시한 분수 계산의 절차적 지식 파지 검사에서의 결과를 요약해 보면 <표 12>와 같다.

<표 12> 절차적 지식 파지 검사의 결과 요약.

집단(n) / 학습 내용	기하적방법(37)		대수적 방법 (30)		발견적 방법 (35)	
	맞은 아동	%	맞은 아동	%	맞은 아동	%
덧셈	15	0.4054	26	0.8667	18	0.5143
뺄셈	16	0.4324	22	0.7333	17	0.4857
곱셈(1)	18	0.4865	20	0.6667	12	0.3429
곱셈(2)	19	0.5135	19	0.6333	13	0.3714
나눗셈(1)	5	0.1351	10	0.3333	9	0.2571
나눗셈(2)	3	0.0811	19	0.6333	10	0.2857
평균	2.0541	34.23	3.8667	64.44	2.2571	37.62

<표 12>에 따르면, 전체 학습 내용에 대해 평균적으로 기하적 방법에 의해 학습한 아동들은 37명 중 34.23%, 대수적 방법에 의해 학습한 아동들은 30명 중 64.44%, 발견적 방법에 의해 학습한 아동들은 35명 중 37.62%가 학습한 내용을 파지하고 있어, 대수적 방법에 의한 학습 방법으로 학습한 아동들이 전반적으로 높은 획득 점수를 얻었음을 알 수 있다. 학습 내용별로는 절차적 지식 획득 검사의 결과와 비슷한 결과가 나왔으며, 특히, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, (자연수) ÷ (진분수)에서의 결과에서, 대수적 방법 집단이 86.67%, 73.33%, 63.33%로 다른 두 집단보다 높은 통과율을 보였다.

<표 13> 학습 내용별 절차적 지식 파지 검사 결과의 일원 분산 분석표

내용	변량원	df	SS	MS	F비	유의 확률
덧셈	집단간	2	3.7441	1.8721	8.7717	0.0003***
	집단내	99	21.1284	0.2134		
뺄셈	집단간	2	1.6525	0.8263	3.4529	0.0355*
	집단내	99	23.6906	0.2393		
곱셈(1)	집단간	2	1.6946	0.8473	3.5251	0.332
	집단내	99	23.7956	0.2404		
곱셈(2)	집단간	2	1.1187	0.5593	2.2712	0.1085
	집단내	99	24.3813	0.2463		
나눗셈(1)	집단간	2	0..6762	0.3381	1.8937	0.1559
	집단내	99	17.6767	0.1786		
나눗셈(2)	집단간	2	5.0945	2.5473	14.9516	0.0000***
	집단내	99	16.8663	0.1704		

* $p < 0.05$, *** $p < 0.001$

이 결과에 대해 실시한 일원 분산 분석 결과가 <표 13>에 정리되어 있다. 표에 따르면 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, (자연수) ÷ (진분수)에서의 파지 정도가 각각 유의 수준 0.001, 0.05, 0.001에서 세 집단간에 유의한 차이가 있음을 나타내고 있다.

<표 14> 분수 계산의 절차적 지식 획득 검사에서 유의한 차이를 나타낸 학습 내용에 대한 문항별 Scheffé-검정 결과(세 집단의 조화 평균; 33.7337)

학습 내용	q-통계량 / 집단(평균)	기하적 방법 집단 (G)	발견적 방법 집단 (D)	대수적 방법 집단 (A)
덧셈	G (0.4054)			
	D (0.5143)	1.36		
	A (0.8667)	5.80*	4.43*	
뺄셈	G (0.4324)			
	D (0.4857)	0.63		
	A (0.7333)	3.57*	2.94	
나눗셈 (1)	G (0.0811)			
	D (0.2857)	2.88		
	A (0.6333)	7.77*	4.89*	

* $p < 0.05$ ($q_{.05}$ = 3.51)

따라서 차이의 원인을 밝히기 위해 <표 14>와 같이 사후 검정으로서 Scheffé-검정으로 실시한 바, 이분모 분수 덧셈과 (자연수) ÷ (분수)의 학습 내용 파지에서는 각각 0.05 유의 수준에서 대수적 방법으로 학습한 집단이 기하적 방법이나 발견적 방법으로 학습한 집단보다 유의하게 높은 점수를 얻었음을 보여주고 있으며, 이분모 분수 뺄셈의 경우에는 대수적 방법과 집단과 기하적 방법만이 유의한 차를 보이고 있음을 알 수 있다.

따라서 대수적 방법에 의해 학습한 집단이 이 세 학습 내용에 대해서는 기하적 방법에 의해 학습한 집단보다 높은 파지도를 보이고 있음을 알 수 있다.

<표 15>은 전체적인 학습 내용에 대한 세 집단간의 차이의 유무를 밝히기 위해서 일원 분산 분석을 실시한 결과이다. 전체적인 학습 내용에 대한 파지정도에서 세 집단은 유의 수준 0.001에서 유의한 차이를 나타내고 있다.

<표 15> 전체 학습 내용에 대한 파지 검사 결과의 일원 분산 분석 결과

변량원	df	SS	MS	F비	유의 확률
집단간	2	62.9459	31.4730	8.6062	0.0004***
집단내	99	362.0443	3.6570		
계	101	424.9902			

*** $p < 0.001$

세 집단간의 차이의 원인을 밝히기 위해서 실시한 사후 검정(Scheffé-검정)의 결과가 <표 16>에 요약되어 있다.

<표 16>에서 알 수 있듯이, 유의 수준 0.05에서 대수적 방법으로 학습한 집단이 다른 두 집단보다 유의하게 높은 점수를 획득했음을 알 수 있다.

<표 16> 전체 학습 내용에 대한 절차적 지식 파지 검사 결과의 Scheffé 검정 결과(세 실험 집단의 조화 평균; 33.7337).

q-통계량 / 집단(평균)	기하적 방법 집단 (G)	발견적 방법 집단 (D)	대수적 방법 집단 (A)
G (2.0541)			
D (2.2571)	1.62		
A (3.8667)	5.50*	4.89*	

* $p < 0.05$ ($q_{.05} = 3.51$)

이 결과는 절차적 지식의 파지정도에서도 절차적 지식 검사의 결과와 동일한 결과를 나타냈음을 알 수 있다.

논 의

본 연구의 목적은 절차적 지식 학습에 있어 아동들의 선행 지식을 효과적으로 활성화 시킬 수 있는 적절한 단서에는 어떠한 것이 있고 절차적 지식 획득과 파지(retention)에 유용한 획득 방법에는 어떠한 것이 있겠는가를 알아보고자 하였다.

이에 따른 연구 문제를 차례로 살펴보면서 연구 문제에 대한 논의를 하고자한다.

연구 문제 1 - 절차적 지식 획득의 초기 단계에서, 세 가지 종류의 단서에 따른 효과는 전 학습 내용에 대해서 기하적인 단서를 제시받은 집단이 높은 결과를 얻은 것으로 나타났고, 대수적 단서를 받은 집단과 아무 단서도 받지 않은 집단은 동질 집단으로 차이가 없는 것으로 나타났다. 학습 내용별로 분석해 보면 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 자연수와 분수의 곱셈에서 기하적 방법으로 학습한 집단이 대수적 방법 집단, 발견적 방법 집단보다 더 높은 결과를 나타내었다.

연구 문제 1-1 - 아무런 단서를 제시받지 못한 발견적 방법 아동들의 접근 방법은 압도적으로 대수적 방법을 취했다.

연구 문제 2 - 절차적 지식 획득 검사의 결과에 의하면, 3일 간의 학습 후에는 대수적 방법으로 절차적 지식을 학습한 집단이 다른 기하적 방법에 의해 학습한 집단과 발견적 방법에 의해 학습한 집단에 비해 전체 학습 내용에서 우수한 학습 결과를 나타내었다. 발견적 방법 집단과 기하적 방법 집단은 차가 없는 동질 집단으로 나타났다. 학습 내용

별 분석에 의하면, 대수적 방법으로 학습한 집단은 이분모 분수 덧셈과 뺄셈, (자연수) ÷ (분수)에서 다른 두 집단 보다 높은 점수를 얻은 것으로 나타났다.

연구 문제 3 - 기하적 방법 집단, 대수적 방법 집단, 발견적 방법 집단 간에 분수 절차적 지식의 파지에서는 절차적 지식 획득에 있어서의 결과와 같은 양상으로 대수적 방법 집단이 다른 두 집단에 비해 우수한 결과를 나타냈다.

이상의 연구 결과에 의하면, 본 연구는 분수 계산의 어려움이 두 분수의 부호 조작에 있다고 밝힌 Cunio(1988)의 연구와 맥을 같이하고 있다. 그의 연구에서 아동들은 한 분수의 크기를 정확히 확인하고 두 분수의 합의 크기를 비교적 정확히 어림할 수 있으나 그 정확한 계산을 수행할 수 없었다. 이것은 Anderson(1980)의 이론에 의한 절차적 지식 발달의 저해 요인인 작동 기억 용량 한계라는 측면에서 해석해 보면, 아동들이 부호 조작시 두 분수의 크기에 대한 지식을 작동기억에 동시에 활성화시키는데 어려움이 있다는 것이다. 따라서 본 연구의 결과에 의하면 아동들이 분수 계산에 있어 이 작동 기억의 용량을 극복하는데 좀 더 효과적인 방법은 대수적 방법이라고 제안할 수 있다.

또한, 절차적 지식 학습의 초기 단계에서 높은 학습 결과를 낸 기하적 방법 집단이 절차적 지식 획득 검사에서 상대적으로 낮은 학습 결과를 나타냈음으로써, 초기에 좋은 결과를 낸 기하적 방법은 분수 절차적 지식에 필요한 지식인 4학년 아동들이 장기 기억 속의 관련 선행 지식을 활성화시키는 데 도움이 되지 않았음을 보여주고 있다. 따라서 반 구체물 조작 단계와 절차 실행의 단계를 대응시키는 寫像(mapping) 수업은 본 연구에서 별다른 효과를 나타내지 못했고 선행 지식이 충분히 활성화될 수 있도록 대수적인 단서를 제공하는 방법이 대체로 효과적임을 알 수 있다. 결과적으로 4학년 아동들의 분수 계산의 절차 학습에 있어 아동의 정보 표상을 돕는 단서는 바로 대수적 방법에 의한 학습 방법이었다. 연구 문제 1-1은 이러한 방법이 다른 방법에 비해 아동들에게 자연스런 접근 방법임을 지지해 주고 있다. 이러한 결과는 처음 어떤 수학적 내용을 학습할 때는 구체적인 조작활동이 필요하나 더 추상적인 부호 조작 활동이나 부호 체계를 학습할 때는 이렇게 학습한 수학적 내용 자체가 다시 새로운 개념이나 절차에 대한 기재로서 쓰여져야 한다는 Wearne와 Hiebert(1988)의 견해를 지지하고 있다.

본 연구의 결과는 아동들이 분수 계산에 필요한 지식을 정교화시키는데 기하적 정보보다는 대수적 정보가 더 효과적으로 작용했음을 알 수 있다. 이는 정교화의 유형에 따라 그 효과가 다름을 확인한 선행 연구의 결과와 상통한다(Mayer, 1980).

결론 및 제언

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 4학년 아동들의 분수 계산의 절차적 지식을 학습시키는 데 있어 효과적인 방법은 기하학적 그림을 주고 그 그림에서 절차적 계산 수행의 규칙을 이끌어 내어 학습시키려는 방법이 대수적 방법으로 절차적 지식을 제시하는 방법보다 효과가 덜한 것으로 나타났다. 이것은 대수적 방법이 다른 방법보다 더 유의미한 학습을 일어나게 함을 말해 주고 있다. 또한 이런 대수적 단서가, 분수 절차적 지식 학습에 있어 4학년 아동들이 새로운 지식을 표상할 때, 아동들이 기존에 학습하여 기억하고 있는 장기 기억 속의 지식을 활성화시킬 수 있는 선행 지식에 터한 정보라는 것이다. 발견적 방법 집단의 대다수 학생들이 선호한 방법은 기하적 방법보다는 대수적 방법이라는 점은 이러한 결론을 더욱 지지해 주고 있다. 따라서 절차적 지식 학습에 있어 기하적 그림에 대한 지나친 의존보다는 자신이 가지고 있는 대수적 단서에 의해 선행 지식과 새로운 정보와의 관련성을 보게 하도록 지도하는 것이 바람직하다 하겠다.

둘째, 아동들로 하여금 스스로 생각할 수 있도록 절차적 지식을 제시해야 한다. 기하학적 방법으로 학습한 집단이 사후 검사와 파지 검사에서 대수적 방법으로 학습한 집단보다 낮은 효과를 나타내었고 아무런 단서도 제공받지 못한 채로 학습한 집단과 동일한 수준의 효과를 나타낸다는 것은 학습 내용 제시에 있어 아동들이 직접적인 절차적 지식 학습보다는 주어진 그림에 대한 의존해 학습하게 됨으로써 학습한 절차적 지식이 쓰이는 문제가 나왔을 때 자신이 학습한 방법으로 문제에 접근하기 어려웠음을 나타내 준다.

본 연구의 결과를 바탕으로 다음 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구의 결과에 의하면 이분모 분수 덧셈과 뺄셈, (자연수)÷(분수)의 학습 내용에서는 대수적 방법으로 학습한 집단이 우수한 결과를 얻었는데 비해 자연수와 분수의 곱셈, (분수) ÷ (자연수)에 대해서는 유의한 차가 없는 것으로 나타났다. 따라서 후속 연구에서 이의 원인을 밝혀 주는 연구가 필요할 것이다. 특히 발견적 방법과 같이 단서를 받지 못한 아동들이 어떠한 방법으로 문제에 접근했는지를 좀더 세밀히 연구함으로써 아동들의 분수 계산의 절차 학습에서의 학습 과정을 밝힐 필요가 있다.

둘째, 본 연구에서는 분수 개념적 지식이 절차적 지식 획득에 미치는 영향을 직접적으로 탐구하지 못했다. 앞으로의 연구는 수학에 있어 개념적 지식이 절차적 지식 획득에 어느 정도의 영향을 미치는지 탐구함으로써 그 관계를 좀 더 분명히 하여야겠다.

세째, 분수 계산의 절차적 지식 학습에 있어 효과가 있었던 대수적 방법에 의한 학습이 다른 수학적 내용에 대한 절차 학습에서 혹은 다른 연령층의 아동들에게도 효과가 있을 것인지 후속 연구에서 연구할 가치가 있다고 하겠다.

네째, 현 연구에서는 짧은 기간 동안에 분수 계산의 절차적 지식 학습에 있어 기하적 방법과 대수적 방법, 발견적 방법의 효과를 비교하였지만, 앞으로의 연구는 이런 방법을

혼용하여 그 순서를 달리함으로써 생기는 효과를 연구한다면, 좀 더 교육 현장에 도움이 되는 연구가 되리라 생각된다.

참고 문헌

문교부 (1990). ***국민학교 교사용 지도서 산수 5-1.*** 국정 교과서 주식회사.

문교부 (1990). ***국민학교 교사용 지도서 산수 5-2.*** 국정 교과서 주식회사.

Anderson, J. R. (1976). ***Language, memory, and thought***. Hilsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

__________ . (1982). Acquisition of cognitive skill. ***Psychological Review***, 89, 369-406.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert(Ed.), ***Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*** (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. ***Developmental Psychology***, 27(5), 777-786.

Carpenter, T. P., Cobit, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). In E. Fennema(Ed.), ***Mathematics education research: Implications for the 80's***(pp. 22-38). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Gagné, E. D. (1985). ***The cognitive psychology of school learning.*** Boston: Little Brown and Company.

Gagné, R. M. (1985). ***The conditions of learning and theory of instruction(4th ed.).*** New York: Holt, Rinehart & Winston.

Cuneo, D. O. (1988). Understanding fraction addition. ***Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*** (ERIC Document Reproduction Service No. ED 297 937).

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. ***Educational Psychologist***, 12(3), 262-283.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). ***Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics***. Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Lefevre. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), ***Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics***(pp. 1-27). Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jeon, P. K. (1988). ***Geometry problem solving of Korean middle school students: An analysis of representation and transfer.*** Unpublished doctoral dissertation, The University of Pittsburgh.

LeFevre, P. (1986). Exploring fractions with fourth graders. ***Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association***, San Francisco, California.

LeFevre, P. (1987). ***The role of conceptual knowledge of fractions in elementary students' solution procedures for fraction addition.*** (Doctoral dissertation, The University of Michigan). Ann Arbor, Michigan: UMI Dissertation Services. No. 8725238.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). ***The psychology of mathematics for instruction.*** Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

<부록 1> 절차적 지식 학습지 1) 집단 G (기하적 방법)

※ 다음 문제들은 여러분이 배우지는 않았으나 주어진 그림을 보고 잘 생각하면 해결할 수 있는 것들입니다. 각 문제에서 왼쪽에 나와 있는 숫자나 □는 오른쪽 그림과 같은 뜻을 나타내고 있습니다. 각 문제에는 완성되지 않은 그림이 있으므로 여러분들이 이것을 완성해 주세요.

1. 다음 그림을 완성하고 그 그림에 알맞은 수를 □ 안에 써넣으시오.

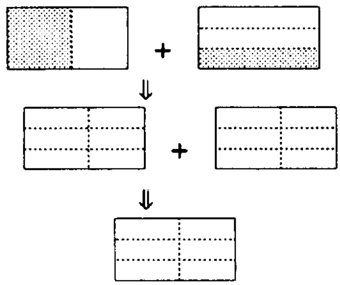
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\square}{\square}$$



따라서 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$ 이다.

2. 다음 그림을 완성하고 그 그림에 알맞은 수를 □ 안에 써넣으시오.

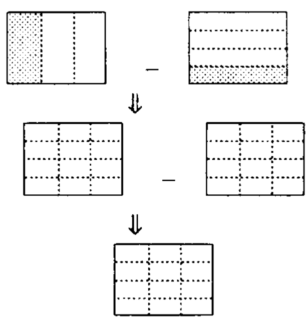
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\square}{\square}$$

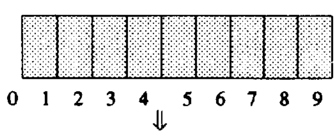


따라서 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$ 이다.

3. 다음 그림을 완성하고 그 그림에 알맞은 수를 □ 안에 써넣으시오.

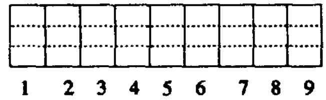
$$9 \times \frac{2}{3}$$

$$\Downarrow$$



의 $\frac{2}{3}$

$\frac{\square}{\square}$



따라서 $9 \times \frac{2}{3} = \square$ 이다.

4. 다음 그림을 완성하고 그 그림에 알맞은 수를 $\square$ 안에 써넣으시오.

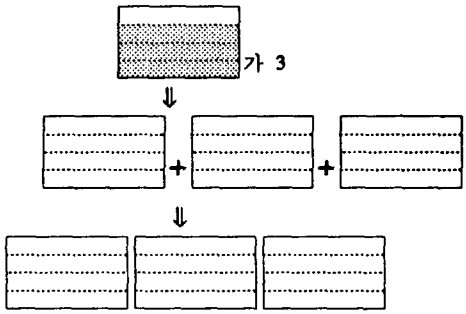
$\frac{3}{4} \times 3$

$\Downarrow$

$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$

$\Downarrow$

$\frac{\square}{\square}$



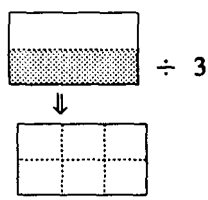
따라서 $\frac{3}{4} \times 3 = \frac{\square}{\square}$ 이다.

5. 다음 그림을 완성하고 그 그림에 알맞은 수를 $\square$ 안에 써넣으시오.

$\frac{1}{2} \div 3$

$\Downarrow$

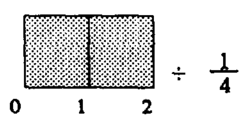
$\frac{\square}{\square}$



따라서 $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{\square}{\square}$ 이다.

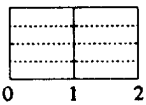
6. 다음 그림을 완성하고 그 그림에 알맞은 수를 $\square$ 안에 써넣으시오.

$2 \div \frac{1}{4}$



⇓

□



따라서 $2 \div \frac{1}{4} = \square$ 이다.

<부록 2> 절차적 지식 학습지 1) 집단 A (대수적 방법)

※ 다음 주어진 문제들은 여러분이 배우지는 않았지만 네모 안의 내용을 이용하면 해결될 수 있는 문제들입니다. 잘 생각해서 풀어보세요.

1. 다음 식의 답을 쓰시오.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

2. 다음 식의 답을 쓰시오.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \cdots$$
$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \cdots$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

3. 다음 글을 잘 읽고 물음에 답하시오.

$9 \times \frac{2}{3}$는 9의 $\frac{2}{3}$와 같습니다.

위와 같은 사실을 이용하여 아래의 곱셈을 해 보시오.

$$9 \times \frac{2}{3} =$$

4. 다음글을 잘 읽고 물음에 답하시오.

6×3 은 $6 + 6 + 6$ 과 같습니다.

위와 같은 사실을 이용하여 아래의 곱셈을 해 보시오.

$$\frac{3}{4} \times 3 =$$

5. 다음 식의 답을 쓰시오.

$\frac{1}{2} \div 3$은 $\frac{1}{2}$을 똑 같이 3 등분한 것 중 하나의 크기를 나타낸다.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} \div 3 =$$

6. 다음 글을 잘 읽고 물음에 답하시오.

12 ÷ 4 는 12에서 4를 3번 뺄 수 있다는 것을 뜻합니다.

위와 같은 사실을 이용하여 아래의 나눗셈을 해보세요.

$$2 \div \frac{1}{4} =$$

<부록 3> 절차적 지식 학습지 1) 집단 D (발견적 방법)

※ 다음 주어진 문제들은 여러분들이 아직 배우지 않은 것들이지만 여러분들이 알고 있는 사실을 잘 이용하면 해결할 수 있는 것들입니다. 잘 생각해서 풀어보고 어떤 방법을 써서 해결했는 지 문제 밑의 빈 공간에 마음대로 적고 절대 지우지는 마세요.

1. 다음 계산을 하시오.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

2. 다음 계산을 하시오.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

3. 다음 계산을 하시오.

$$9 \times \frac{2}{3} =$$

4. 다음 계산을 하시오.

$$\frac{3}{4} \times 3 =$$

5. 다음 계산을 하시오.

$$\frac{1}{2} \div 3 =$$

6. 다음 계산을 하시오.

$$2 \div \frac{1}{4} =$$

<부록 4> 절차적 지식 획득 검사지

( )반 ( )번 이름:( )

※ 다음 계산을 하시오.

1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$

2. $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} =$

3. $\frac{5}{9} \times 4 =$

4. $15 \times \frac{4}{5} =$

5. $\frac{5}{8} \div 2 =$

6. $3 \div \frac{1}{5} =$